Universidade Federal Fluminense - GMA

Reposição de VE1 - Cálculo 2B - Turma J1 - Prof. Zhou Cong

Nome Completo: ______________________________ Data: 06 de Dezembro de 2018

Questão 1 (15 pts)**.** Descreva e esboce o maior domínio possível para que a expressão abaixo torne função:

$$f(x,y) = \ln(x^2 + 2xy + y^2 - 1) - \sqrt{x^2 - 2xy + y^2 - 1}.$$

Questão 2 (15 pts)**.** Verifique a existência do limite abaixo. Se existir, encontre o valor do limite:

$$\lim_{(x,y)\to\left(0,\frac{\pi}{4}\right)} \frac{5\tan(y + e^x - 1) - 5}{1 + \frac{\pi}{4} - y - e^x}.$$

Dica: Encontre as funções $f : D_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que a expressão acima dentro limite fica na forma $f\big(g(x,y)\big)$. Obtenha o valor $u_0 := \lim_{(x,y)\to\left(0,\frac{\pi}{4}\right)} g(x,y)$ e use a propriedade de que:

$$\lim_{(x,y)\to\left(0,\frac{\pi}{4}\right)} f\big(g(x,y)\big) = \lim_{u\to u_0} f(u)$$

para verificar a existência do limite acima e encontrar o seu valor. Provavelmente você também vai precisar aplicar L'Hôpital e usar $\frac{d}{dt}(\tan(t)) = \frac{1}{\cos^2 t}$.

Questão 3 (30 pts)**.** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida pela expressão:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(e^x - x - 1)y}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) (14 pts) Mostre que a função f é contínua no ponto $(0,0)$.

Dica: Use a expansão de Taylor $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ onde $\lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$ e aplique o Teorema de Anulamento corretamente mostrando qual parte da expressão é limitada e qual parte vai para zero.

(b) (6 pts) Calcule o vetor gradiente $\nabla f(0,0)$ da função f no ponto $(0,0)$.

(c) (10 pts) Mostrar que f não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Questão 4 (20 pts)**.** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada pela equação:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy^2}{x^2 + 4y^4}, & (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) (15 pts) Encontre a expressão $x = g(y)$ de um conjunto de nível k da função f. (Dica: você tem que resolver uma equação de segundo grau isolando o variável x).

(b) (5 pts) Prove que a função f não é contínua no ponto $(0,0)$.

Questão 5 (20 pts)**.** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada pela expressão:

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{x^2 + y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0). \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) (10 pts) Prove que a função f é diferenciável em $(0,0)$. (Dica: Note que $-1 \leq \cos t \leq 1$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$, use o Teorema de Sanduíche corretamente justificando cada passo do seu argumento).

(b) (10 pts) Encontre a equação do plano tangente ao gráfico da função f no ponto $(0, 2, f(0,2))$.

Boa Prova!